数理解析研究所講究録
369巻 1979年 164-178

3次元多様体の基本群の表現

筑波大数学　高橋元男

Genus 2 の Poincaré 予想が Thurston その他の人々により肯定的に解決されたので、次の予想を考える：

予想1.（Haken）Mを，closed orientable，connected 3-manifold とする時，$\pi_1(M) \cong Z_n$ ならば，M は lens space である。（$n=1$ の場合が Poincaré 予想）

以下，M は closed orientable connected 3-manifold とする．予想1を拡張して次の予想が考えられる．

予想2．$\pi_1(M)$ がアーベル群ならば，M は lens space か又は $S^1 \times S^1 \times S^1$ である．

予想3．$\pi_1(M) \cong Z \times Z \times Z$ ならば，M は $S^1 \times S^1 \times S^1$ である．

予想4．M が genus 2 の Heegaard splitting を持ち，$\pi_1(M)$ がアーベル群ならば，M は lens space である．即ち，M が Heegaard genus 2 ならば，$\pi_1(M)$ は非アーベル群である．

予想1，予想4を lens space conjecture と呼ぶことにする．

今，仮に予想1が正しくないとし，Mをその反例とする：即ち，Mはlens spaceでなく，$\pi_1(M) \cong Z_n$. 更に$n \neq 0$と仮定する．Mのuniversal covering spaceを$\hat{M}$とすれば，Z_nは有限だから$\hat{M}$はclosed, simply connected 3-manifoldである．次の二つの場合が考えられる：

Case 1. $\hat{M}$はS^3とhomeo.でない．この時$\hat{M}$はPoincaré予想の反例である．

Case 2. $\hat{M}$はS^3とhomeo. この時はS^3のZ_nによるfree actionでorbit spaceがlens spaceでないものが存在することになる．(即ちfree actionについてのSmith conjectureの反例)

いいかえると，Case 2が起らないとすれば予想1($n \neq 0$)はPoincaré予想と同値である．

Lens space conjectureを解くため，$\pi_1(M)$の表現を考えることにする．先ず，次の4つの群を定義する：

$$PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda E\}$$

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm E\}$$

$\mathcal{M}$ = Möbius変換 $w = (az+b)/(cz+d)$,
$(a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$の全体のなす群

$I^+(H^3)$ = hyperbolic 3-space H^3のorientationpreserving isometries の全体のなす群.

これらの4つの群は同型であることが知られている：

$PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C}) \cong M \cong I^+(H^3)$.

以下，表現といえば，$\pi_1(M)$ から $PGL(2,\mathbb{C})$ への表現を意味するものとする.

2つの表現 $h, h' : \pi_1(M) \to PGL(2,\mathbb{C})$ が同値であるというのは，$\exists A \in PGL(2,\mathbb{C})$ $\forall x \in \pi_1(M)$

$$h'(x) = A\, h(x)\, A',$$

となることを意味する.

M が closed の時，表現の同値類は有限の事が多い．（例外：lens spaces の connected sum, sufficiently large manifold のある種のもの等）

予想5. M が irreducible, not sufficiently large ならば，表現の同値類は有限個である.

$$\delta(M) = \pi_1(M) \text{の表現の同値類の個数}$$

とおけば $\delta(M)$ は M の invariant になる.

予想6. M が S^3 と homeo. でないならば，$\pi_1(M)$ の non-trivial な表現が存在する.

（この予想はもちろん Poincaré 予想を imply する.）

<u>Def.</u> 表現が abelian, cyclic, trivial 等というのは．その $PGL(2,\mathbb{C})$ への像がそうである時とする.

予想7. Mが irreducible, not sufficiently large, で lens space でなければ, $\pi_1(M)$は non-abelian な表現を持つ.

(この予想は lens space conjecture を imply する.)

例. 次の様な closed 3-manifold Mが存在する:

$$\pi_1(M) \cong \langle a, b \mid a^3b^2a^3b^{-1} = b^3a^2b^3a^{-1} = 1 \rangle$$

Mは irreducible, sufficiently large

$\pi_1(M)$は非アーベル群であるが、表現はすべてアーベル的である.

以下、具体例について表現を計算する.

Lemma.
$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおく. また x, y の多項式 $\rho_n = \rho_n(x, y)$ を次の様に帰納的に定義する:

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_{n+2} = x\rho_{n+1} + y\rho_n$$

今 $x = p + s \quad y = qr - ps$ とおけば

$$p_n = p\rho_n + y\rho_{n-1}, \qquad q_n = q\rho_n,$$
$$r_n = r\rho_n, \qquad s_n = s\rho_n + y\rho_{n-1},$$

である.

証明. nについての帰納法.

$\rho_2 = x$, $\rho_3 = x^2 + y$, $\rho_4 = x^3 + 2xy$, $\rho_5 = x^4 + 3x^2y + y^2$, $\cdots$

さて，次の様な基本群の表示を持つ 3-manifold について考える：　$\pi_1(M_{m,n}) \cong$

$\langle a, b \mid a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} = (b^{-3} a^2 b^{-1})^m (a b^2)^n = 1 \rangle$,

ここに，m, n は互いに素な整数である．この manifold は、一方の relator の長さが 10 で，[1] において考察されたものである．

$\pi_1(M_{m,n})$ の表現をもとめるため，generator a, b に対し

$$(*) \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad b \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

という行列を対応させる．我々は $PGL(2, \mathbb{C})$ で考えているので

$$a^{-1} \longmapsto \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}, \quad b^{-1} \longmapsto \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

が対応していると考えてよい．これにより a, b の任意の word に対し行列が対応することになる．

$(*)$ が $\pi_1(M_{m,n})$ の表現を与えるためには relators に対応する行列が $PGL(2, \mathbb{C})$ の単位元、即ちスカラー行列 λE となればよい。

先ず，relator $a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} = 1$ について，計算する．

$$a^3 b^{-1} a b^3 a b^{-1} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} p_3 & q_3 \\ r_3 & s_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + q_3 p r \lambda^4 \mu + p_3 q r \mu^5 + q_3 r s \lambda \mu^4, \\ \qquad p_3 p q \lambda^4 \mu + q_3 q r \lambda^5 + p_3 q s \lambda \mu^4 + q_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 \\ r_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + s_3 p r \lambda^4 \mu + r_3 q r \mu^5 + s_3 r s \lambda \mu^4, \\ \qquad r_3 p q \lambda^4 \mu + s_3 q r \lambda^5 + r_3 q s \lambda \mu^4 + s_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 \end{pmatrix}$$

であるから，$q_3 = q\rho_3$，$r_3 = r\rho_3$ に注意すれば，(q≠0 r≠0 として) 条件は

$$F_1 = \rho_3 q r \lambda^4 + p_3 p \lambda^3 \mu + \rho_3 s^2 \lambda \mu^3 + p_3 s \mu^4 = 0 \qquad (1)$$

$$F_2 = s_3 p \lambda^4 + \rho_3 p^2 \lambda^3 \mu + s_3 s \lambda \mu^3 + \rho_3 q r \mu^4 = 0 \qquad (2)$$

$$F_3 = s_3 q r \lambda^5 - p_3 p^2 \lambda^3 \mu^2 + s_3 s^2 \lambda^2 \mu^3 - p_3 q r \mu^5 = 0 \qquad (3)$$

の三つとなる．しかし

$$\rho_3 F_3 = s_3 \lambda F_1 - p_3 \mu F_2$$

なので，$\rho_3 \neq 0$ のもとでは (1) と (2) から (3) が出る．

さて，$qr = y + ps$，$\rho_3 = x^2 + y$，$p_3 = px^2 + (p+x)y$

を (1) に代入して計算すると

$$y^2\lambda^4 + y\{(x^2+ps)\lambda^4 + p(p+x)\lambda^3\mu + s^2\lambda\mu^3 + s(p+x)\mu^4\}$$
$$+\{psx^2\lambda^4 + p^2x^2\lambda^3\mu + s^2x^2\lambda\mu^3 + psx^2\mu^4\} = 0 \qquad (4)$$

を得る．同様に (2) を計算すると

$$y^2\lambda^4 + y\{p(s+x)\lambda^4 + p^2\lambda^3\mu + s(s+x)\lambda\mu^3 + (x^2+ps)\mu^4\}$$
$$+\{psx^2\lambda^4 + p^2x^2\lambda^3\mu + s^2x^2\lambda\mu^3 + psx^2\mu^4\} = 0 \qquad (5)$$

を得る．(4)−(5) を計算すると

$$y(\lambda^4-\mu^4)+x(s\lambda+p\mu)(\lambda^3-\mu^3)=0$$

を得る．$\lambda^4 \neq \mu^4$ と仮定すれば

$$y=-\frac{(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)(s\lambda+p\mu)}{(\lambda+\mu)(\lambda^2+\mu^2)}\,x \qquad (6)$$

となる．次に，計算を簡略化するため relator $a^3b^{-1}ab^3ab^{-1}=0$ を $b^3ab^{-1}a^3b^{-1}a=0$ と変形して計算する．

$$b^3ab^{-1}a^3b^{-1}a \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^3 & 0\\ 0 & \mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_3 & q_3\\ r_3 & s_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 0\\ 0 & \mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_3p^2\mu^2+r_3pq\lambda\mu+q_3pr\lambda\mu+s_3qr\lambda^2, & p_3pq\mu^2+r_3q^2\lambda\mu+q_3ps\lambda\mu+s_3qs\lambda^2\\ p_3pr\mu^2+r_3ps\lambda\mu+q_3r^2\lambda\mu+s_3rs\lambda^2 & p_3qr\mu^2+r_3qs\lambda\mu+q_3rs\lambda\mu+s_3s^2\lambda^2\end{pmatrix}$$

より，

$$p_3p\mu^2+p_3(ps+qr)\lambda\mu+s_3s\lambda^2=0$$

即ち，

$$y^2\lambda\mu+y\{p(p+x)\mu^2+(x^2+2ps)\lambda\mu+s(s+x)\lambda^2\}$$
$$+p^2x^2\mu^2+2psx^2\lambda\mu+s^2x^2\lambda^2=0 \qquad (7)$$

を得る．

(7) に (6) を代入して，計算して簡単にすると

$$p\mu(\lambda^5+2\lambda^4\mu+2\lambda^3\mu^2+3\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5)$$
$$+s\lambda(\lambda^5+2\lambda^4\mu+3\lambda^3\mu^2+2\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5)=0$$

を得る．p, q, r, s は斉次なので

$$p=\lambda(\lambda^5+2\lambda^4\mu+3\lambda^3\mu^2+2\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5) \tag{8}$$
$$s=-\mu(\lambda^5+2\lambda^4\mu+2\lambda^3\mu^2+3\lambda^2\mu^3+2\lambda\mu^4+\mu^5) \tag{9}$$

と考えてよい．これと (6) より

$$y=-\lambda^3\mu^3(\lambda^3-\mu^3)^2 \tag{10}$$

を得る．逆に (8), (9), (10) をみたす様に λ, μ, p, q, r, s を定めれば（但し $ps-qr\neq 0$, $\lambda\mu\neq 0$），relator $a^3b^{-1}ab^3ab^{-1}=1$ がみたされる．

次に，第二の relator $(b^{-3}a^2b^{-1})^m(ab^2)^n=1$ について考える．先ず第一の relator のもとで $b^{-3}a^2b^{-1}$ と ab^2 は可換なことに注意する．

$$ab^2\longmapsto\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\lambda^2 & q\mu^2\\ r\lambda^2 & s\mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

とおく．これの固有値を $\kappa\xi$, $\kappa\eta$ とすると（但し $\kappa\neq 0$ $\xi\neq\eta$ とする）

$$\left.\begin{aligned}\kappa^2\xi\eta&=-\lambda^2\mu^2y=\lambda^5\mu^5(\lambda^3-\mu^3)^2\\ \kappa(\xi+\eta)&=\lambda^2p+\mu^2s=(\lambda^2-\mu^2)(1\ 2\ 4\ 3\ 4\ 2\ 1)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

となる．ただし $(1\ 2\ 4\ 3\ 4\ 2\ 1)$ は

$$\lambda^6+2\lambda^5\mu+4\lambda^4\mu^2+3\lambda^3\mu^3+4\lambda^2\mu^4+2\lambda\mu^5+\mu^6$$

の略である．

(11)から K を消去すると，斉次方程式

$$\xi\eta(\lambda+\mu)^2(1\ 2\ 4\ 3\ 4\ 2\ 1)^2=(\xi+\eta)^2\lambda^5\mu^5(1\ 1\ 1)^2, \quad (12)$$

を得る．次に，

$$b^{-3}a^2b^{-1}\longmapsto\begin{pmatrix}\mu^3 & 0\\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2 & q_2\\ r_2 & s_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu^4p_2 & \lambda\mu^3q_2\\ \lambda^3\mu r_2 & \lambda^4 s_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$$

とおく．また

$$D=\begin{pmatrix}K\eta-\alpha & -\beta\\ -K\xi+\alpha & \beta\end{pmatrix}$$

とおくと

$$D\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}D^{-1}\sim\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}$$

となる．（$\sim$ は $PGL(2,\mathbb{C})$ で等しいという意味．）

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ は可換であるから

$$D\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}D^{-1}$$

も対角行列になるはずである．これを計算すると

$$\begin{pmatrix}A\xi-B\eta & 0\\ 0 & B\xi-A\eta\end{pmatrix}$$

ただし，

$$A=\alpha\alpha'+\beta\gamma'+\gamma\beta'+\delta\delta'$$
$$B=\alpha\delta'-\beta\gamma'-\gamma\beta'+\delta\alpha'$$

である．したがって

$$ab^2\longmapsto D^{-1}\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}D$$

$$b^{-3}a^2b^{-1}\longmapsto D^{-1}\begin{pmatrix}A\xi-B\eta & 0\\ 0 & B\xi-A\eta\end{pmatrix}D$$

となるので，第二の relator $(b^{-3}a^2b^{-1})^m(ab^2)^n=1$ がみたされる条件は

$$\begin{pmatrix}(A\xi-B\eta)^m & 0\\ 0 & (B\xi-A\eta)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^m & 0\\ 0 & \eta^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A\xi-B\eta)^m\xi^n & 0\\ 0 & (B\xi-A\eta)^m\eta^n\end{pmatrix}=1$$

即ち

$$(A\xi-B\eta)^m\xi^n=(B\xi-A\eta)^m\eta^n \qquad (13)$$

となる．ここで A，B を計算すると（共通因数は省略して）

$$A=\lambda^5\mu^5(1,2,4,5,4,2,1)$$

$$B=(1,6,22,56,113,185,261,316,339,316,261,185,113,56,22,6,1)$$
$$=(1,1,1)^2(1,4,11,20,31,37,43,37,31,20,11,4,1)$$

となる．(12)，(13) の解で

$$\lambda\mu\neq0\quad \lambda\neq\mu,\ \lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\neq0,\ \xi\eta\neq0,\ \xi\neq\eta,\ \xi\neq-\eta$$

をみたすものが，求める表現を与える．

(12) の次数は $(2, 14)$ (つまり ξ, η に関して 2 次, λ, μ に関して 14 次の意味), (13) の次数は $(|m|+n, 16|m|)$ である. (但し $n \geqq 0$ とする.)

従って (12), (13) は $CP^1 \times CP^1$ において, 重複度を含めて,

$$2 \cdot 16|m| + 14(|m|+n) = 46|m| + 14n \qquad (14)$$

個の交点を有する. (Bezout の定理, [2] 参照)

上にも述べた様に, この中で

$\lambda\mu=0$, $\lambda=\mu$, $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=0$, $\xi\eta=0$, $\xi=\eta$, $\xi=-\eta$

のどれかが成り立つ時のみ, 表現を与えない. (12) を考慮すると

(i) $\lambda\mu=0$, $\xi\eta=0$

(ii) $\cancel{\lambda\mu=0}$, $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=0$, $\xi\eta=0$

(iii) $(\lambda+\mu)(1\ 2\ 4\ 3\ 4\ 2\ 1)=0$, $\xi+\eta=0$

(iv) $\xi=\eta$, $\cdots$ (長くなるので省略)

のどれかの時である. これらの点における交点数(重複度)を求めると

(i) の 4 点の各々で, $\min(5n, 8m)$ $(m \geqq 0$ の時$)$ $(m,n) \neq (5,8)$

0, $(m<0$ の時$)$, 41, $(m,n)=(5,8)$ の時,

となる.

(ii) の 4 点の各々で $\min(2n, -2m)$ $(m<0$, $(m,n) \neq (-1,1))$

0, $(m \geqq 0)$, 12, $(m,n)=(-1,1)$ の時, となる

(iii) の各点での交点数の合計は $12|m|$,

(iv) の各点での交点数の合計は

$$\begin{cases} 14m+14, & n \text{ が奇数} \\ 14m+16, & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる. 以上を (14) から引くと (それを D とすると)

$8m>5n$ の時

$$D=20m-6n-{}^{14\,(n\text{奇})}_{16\,(n\text{偶})}$$

$5n>8m>0$ の時

$$D=-12m+14n-{}^{14}_{16}$$

$0>2m>-2n$ の時

$$D=-12m+14n-{}^{14}_{16}$$

$0>-2n>2m$ の時

$$D=-20m+6n-{}^{14}_{16}$$

と $(m,n)=(5,8)$ の時 $D=32$

$(m,n)=(-1,1)$ の時 $D=8$

となる.

しかし $n=$偶数の時には上の解以外に $a^2=1,\ b^2=1,\ (ab)^3=1$ から得られる表現が存在する. これを2と数えれば上の式に加えて, nの偶奇の区別をする必要がなくなる. (何故2と数えるかについてはⅡで述べる.) この様にした結果を D^* とすれば

$$D^* = \begin{cases} 2|5n-8m| + 4|m+n| - 14, & (m,n) \neq (5,8), (-1,1) \\ \quad〃 \qquad\qquad 〃 \qquad -18 = 32, & (m,n) = (5,8) \\ \quad〃 \qquad\qquad 〃 \qquad -18 = 8 & (m,n) = (-1,1) \end{cases}$$

となる.(なお $(m,n)=(0,1),(1,0)$ の場合も区別して計算しなければならないが,丁度上の結果と一致する.)

次に,D^* がどのような値を取るかを調べる. 上の D^* の式において m, n を任意の実数とすれば $(m;n)=(5;8)$ と $m:n=-1,1$ の所を除いて piecewise linear な関数になる. $D^*=0$ となる (m,n) は丁度平行四辺形上にあり,その内部で $D^*<0$,外部で $D^*>0$ となる.(図1参照)

図1から,わかるように,この平行四辺形は原点以外の格子点を内部に含まず周上に $(m,n)=(0,1),(0,-1),(1,1),(-1,-1)$ がある.つまり $(0,1)$,$(1,1)$ の時のみ D^* は 0 であり その他の (m,n) ($m,n \in \mathbb{Z}$ $(m,n)=1$, $n \geqq 0$) においては $D^*>0$ となり,従って non-abelian な表現が存在する.従って $(0,1)$,$(1,1)$ 以外の manifold は lens space ではない.($\pi_1(M)$ は non-abelian である.)

$(m,n)=(1,1)$ の時は,type $(13,3)$ の lens space

$(m,n)=(0,1)$ の時は type $(9,2)$ の lens space

であることは Heegaard 分解を調べることによりわかる.

故にこの様な manifold においては予想1,予想4は

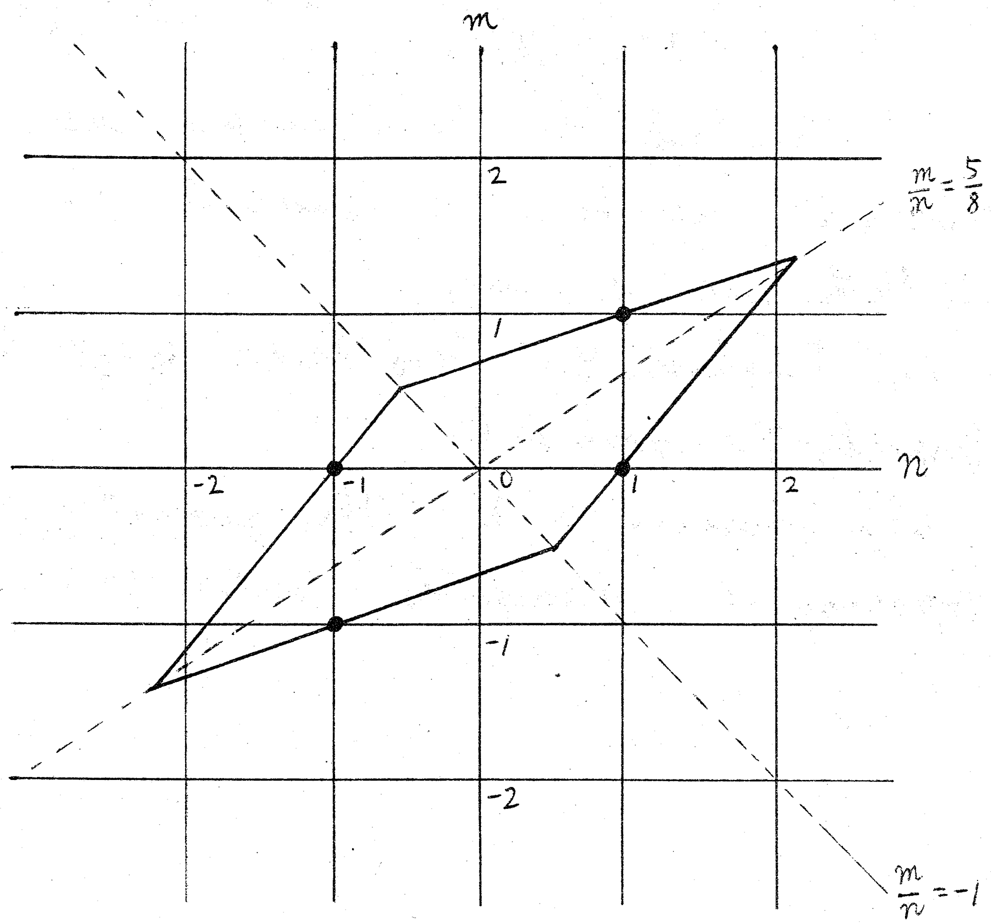

図 1.

成り立っている。

なお、$(m,n)=(5,8),(-1,1)$ の場合 manifold は sufficiently large となる。もちろん $H_1(M)$ が無限になる $(m,n)=(9,22)$ の場合も sufficiently large となる。これ以外の場合 sufficiently large とならないことが Haken-Thurston の方法で証明出来る。

参考文献

[1] Takahashi M. Some simple cases of Poincaré conjecture, to appear in Journal of Math. Soc. of Japan

[2] Takahashi M. Two bridge knot have Property P. preprint.

[3] Thurston W. P. The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Note.